Consignes

Écrire votre nom, prénom, numéro d'étudiant en haut à gauche de la première page. Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit R la relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ définie par $(x, y) \in R$ si $x + y \leq 2$.

1. (2 points) Donner tous les couples de la relation R.

Solution:

$$R = \{(0,0); (0,1); (0,2); (1,0); (1,1); (2,0)\}$$

2. (4 points) Est-ce que cette relation est réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Solution:
— Réflexive : non, car $(2,2) \notin R$.
— Symétrique : oui : pour $(x, y) \in R$, $x+y \leq 2$ donc **par commutativité de l'addition**, $y + x \leq 2$ et $(y, x) \in R$.
— Antisymétrique : non, car $(0,1) \in R$ et $(1,0) \in R$ mais $\mathbf{(0,1) \neq (1,0)}$.
— Transitive : non, car $(2,0) \in R$ et $(0,1) \in R$ mais $(2,1) \notin R$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = xy$.

1. (3 points) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Solution:
— Injective : non, $f(1,0) = f(2,0)$ mais $(1,0) \neq (2,0)$.
— Surjective : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre $f(n,1)$.
— Bijective : non, car non injective

Exercice 3

Soit R une relation sur un ensemble E.

1. (3 points) Montrer que R est transitive si et seulement si $R.R \subseteq R$.

Solution: Preuve par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que R est transitive. Montrons que $R.R \subseteq R$. Soit $(x, z) \in R.R$. Par définition, il existe $y \in E$ tel que $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$. Par transitivité de R, $(x, z) \in R$. Donc $R.R \subseteq R$

$\Leftarrow$ Supposons que $R.R \subseteq R$. Montrons que R est transitive. Soient $x, y, z \in E$ tels que $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$. Donc $(x, z) \in R.R$. Par hypothèse, $R.R \subseteq R$, donc $(x, z) \in R$ et R est transitive.

Exercice 4

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications.

1. (1 point) Donner la définition de l'injectivité d'une fonction.
2. (1 point) Donner la définition de la surjectivité d'une fonction.
3. (3 points) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

   Solution: Supposons que $g \circ f$ est injective. Soit $a, a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$. En composant par g, on obtient $g(f(a)) = g(f(a'))$. Par injectivité de $g \circ f$, $a = a'$. Ainsi, f est injective.

4. (3 points) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

   Solution: Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $c \in C$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $a \in A$ tel que $(g \circ f)(a) = c$. Donc pour $b = f(a)$, on a $g(b) = c$. Ainsi, g est surjective.